

在平行四边形单元教学中提升学生的逻辑推理素养 ——以平行四边形单元起始课为例

金萍

浙江省杭州市富阳区银湖中学 浙江杭州 311402

【摘要】逻辑推理是平行四边形教学单元承载的最为核心的学科素养。学生学科素养的培养要通过推理能力的落实达成，单元起始课要解决好两个最根本的问题：其一、指导学生经历合情推理发现、演绎推理论证平行四边形性质的完整过程，为单元学习提供研究样例；其二、指导学生通过类比几何研究的一般思路构建单元研究的整体框架，为推理能力的发展做好规划。

【关键词】平行四边形；推理能力；逻辑推理

引言

“逻辑推理”是数学学科的核心素养之一，素养的培养需要通过推理能力的落实达成。推理一般包括：合情推理和演绎推理。合情推理：从已有的事实出发，凭借经验和直觉，通过归纳和类比等推断某些结果。演绎推理：从已有的事实和确定的规则出发，按照逻辑推理的法则证明和计算。在解决问题的过程中，两种推理功能不同，相辅相成。合情推理用于探索思路，发现结论；演绎推理用于证明结论。章节起始课将经历发现、类比、归纳、演绎等层层递进的推理过程，其推理能力发展路径设计如下：

一、确定研究对象，形成猜想

1. 确定研究要素

依据几何图形的研究逻辑确定平行四边形的研究要素是学生逻辑思维的起点，在推理能力的养成过程中具有无可替代的价值。从已有研究经验出发，调取样例：三角形是围绕构成图形的要素及相关要素展开的研究，可以类比迁移到平行四边形上：与三角形的研究保持逻辑一致，边和角是平行四边形的研究要素，而对角线是相关要素。三角形的性质是对边、角、三线所进行的定性以及定量研究，同样的平行四边形的性质将围绕边、角、对角线的数量关系或位置关系展开研究。

2. 形成猜想

在日常教学中，培养学生“大胆猜测、小心论证”，“定性思考、定量把握”。观察、度量、图形变化都是形成猜想的重要手段。先看几个典型案例：

思路一借助中心对称形成猜想。北师大教材在对每一种图形性质展开研究之前都安排相应的图形变化内容，为图形性质的研究提供变化的视角，相应的，在平行四边形单元之

前研究了中心对称图形，做好研究铺垫，有利于平行四边形性质的整体发现。由于有中心对称图形的上位知识，学生自然会用最直观的方式产生猜想，按照这样的思路就可以展开以下设计：

【问题设计】(直观演示——用两张全等的、不同颜色的纸片代替平行四边形，用磁铁重叠固定在黑板上。将其中一张纸片转动180度，还能和另一张纸片重合。初步判断平行四边形是中心对称图形)。分析这个实验过程，提出疑问：那么“重合”的含义是什么呢？

预设：“重合”意味着相等（或平行）。

追问1能不能用要素之间的关系来刻画“重合”？

预设：初步判断平行四边形的线段、角等要素间存在相等关系。

追问2以上猜想是否正确呢？我们需要给出逻辑推理和证明。

预设：逻辑证明的起点在定义，需要回到定义做出严格判断……

借助实验操作发现平行四边形具有中心对称性，这是借助纸片的物理属性来直观呈现平行四边形的图形性质，并对研究要素间的关系提出了猜想：“平行四边形的线段、角等要素间存在相等关系”，这是从已有的事实出发，凭借经验和直觉所作的判断，是合情推理，所作的判断是否正确还需要用演绎推理加以严格证明。

思路二借助观察度量形成猜想。人教版教材采用观察、度量等方法确定对象、形成猜想：

根据定义，画一个平行四边形并观察它，除了“两组对边分别平行”之外，平行四边形的边之间还有什么关系呢？它的角之间有什么数量关系？通过度量，与你的猜想一致

吗？

通过观察、度量能够发现对边、对角存在相等的关系，从要素的观点出发发现对角线之间的关系也不会意外。从整体上看，无论哪一种合情推理方式都是基于一定的逻辑体系进行的设计，目的都是用好上位知识，选择合理的先行组织的材料，体现研究的连贯性，并形成猜想。

思路三借助图形的平移形成猜想。如图1，将线段AB沿确定的方向平移一定的距离，形成平行四边形。根据平移的性质得到结论：平移前后的图形（线段AB与线段A'B'）完全相同，并且连结各组对应点的线段平行，由此形成猜想。

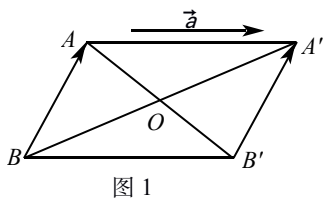


图1

在数学学习中，发现结论与证明结论同样重要，无论使用哪一种猜想手段，逻辑的自洽非常重要，研究对象的确定需要基于对上位知识的合理理解和使用。

3. 类比推理确定研究思路

在凭借经验和直觉做出判断的基础上，再进一步，从图形研究视角回顾三角形的研究过程形成平行四边形的整体研究思路，如图2。

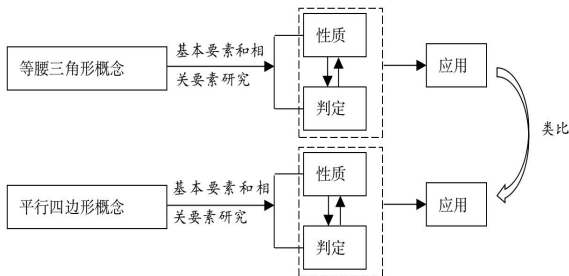


图2

通过类比推理推断某些结果是合情推理的基本形式，是创造性问题解决、因果关系推理的思维形式，是认知发展的核心能力。尽管学生已经具备研究经验，但是在新旧知识之间建立关联的能力尚不完备，学生不容易建立研究思路，需要通过有效的问题设计，指导学生发现等腰三角形与三角形、平行四边形与四边形的隶属关系，三角形与四边形概念外延之间的关系，进而主动类比三角形的研究，明确平行四边形的研究也围绕要素以及相关要素展开，由此确定研究要素，也就确定了自然流畅的研究思路。类比推理的主要思路是依据两个不同的对象在某些方面有类同之处，推出这两个对象在其它方面也可能具有类同之处[1]，这样的学习方法对学生

未来将要研究的几何图形也具有指导意义。

二、表征特征，形成命题

确定研究对象之后，自然要有逻辑地发现对象的性质和特征，尽管这个过程与先行组织者材料的提供方式相关，与确定研究要素形成猜想的过程相呼应，但是所发现的结论都是一致的，都可以直接成批量的发现研究对象的特征，如图3：AD//BC, AB//CD; AD=BC, AB=CD; ∠ABC=∠ADC; ∠BAD=∠BCD; OA=OC, OD=OB; ……

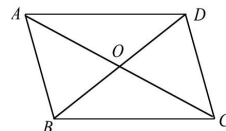


图3

并且可以引导学生有逻辑地按照要素和相关要素（边、对角、对角线）进行合理的分类（当然也可以有其它观点阐述）。

（对边的关系）：AD//BC, AB//CD; AD=BC, AB=CD;

（对角的的关系）：∠ABC=∠ADC; ∠BAD=∠BCD;

（邻角的关系）：∠ABC+∠BCD=180°, ∠ADC+∠BAD=180°;

（对角线的关系）：OA=OC, OD=OB;

……

在平行四边形单元之前，学生已经对命题、定理等相关概念有所学习，并且知道命题是对逻辑关系的表述，是推理的对象，因此，将平行四要素间关系表述成命题形式是研究过程的一个自然环节，可以成批量的形成系列命题：

“若四边形ABCD是平行四边形，则AD=BC, AB=CD”或者“平行四边形的对边相等”等系列命题。此处需要追问，这些获得的命题是否都是平行四边形特有的关系。此处可以告知学生，从本质上看，图形各要素间关系所形成的命题中的真命题都是平行四边形的性质，但是为了避免混淆以及有序研究，通常将图形特有的关系称为性质。由此甄别出“AD=BC, AB=CD”，“∠ABC=∠ADC; ∠BAD=∠BCD”，“OA=OC, OD=OB”是平行四边形特有的关系。

聚焦课时内容，平行四边形的性质是重点，性质的获得首先要从具体图形中发现筛选，进而把特殊问题赋予一般意义。因此指导学生在探索的基础上有条理的整理这些关系，并进一步明确哪些是平行四边形特有的，再进行严格证明，上升为图形的性质。

确定研究要素之后，将学生通过直观操作获得的结论整理成命题，这样的以个别结论为前提推出一般性结论的过程就是一种归纳推理。显然归纳推理的目的是对直观猜测所得结论的一般化表达，向着性质定理的得出迈进了一大步。

三、基于定义，演绎推理

从本质上看，平行四边形性质的前提条件是平行四边形的概念，其它性质是“两组对边分别平行”的等价转化，是线段的位置关系向线段和角的数量关系的转化。本环节是合情推理的自然延续，需要用严格证明的方式进行演绎推理，验证归纳得到的结论，利用对角线将平行四边形问题转化为三角形全等完成论证，水到渠成。

符号语言向文字语言转换是本环节的关键，对学生而言，用符号语言表述结论有具体图形可以依赖，表述方式熟悉且直观。但从符号语言上升到定理表述，涉及到抽象能力，是思维水平的一次综合提升，此处要引导学生调用已有知识经验，与以往的定理表述方式进行类比，关注对研究要素的表述，合理自然的抽象出定理，提升理性思维水平。

演绎推理是从一般到个别的推理，这部分内容处于学生推理能力发展的转折点，性质与概念的关系、性质是什么、性质的研究方法、性质定理的抽象等等关键问题都集中于此，其中还涉及到将未知问题转化为已知方法加以论证的转化思想，综合性强且繁杂，此处需要明确一个基本要求：前提需要真实，过程需要正确，所有的推理要合乎逻辑。

四、理解定理，纳入框架

1.配置合理的精致练习

使用定理解决问题的过程，是对研究对象的精致过程。所设计的例题或练习可以是合情推理和演绎推理有机结合、系列演绎推理综合等类型的问题，甚至可以添加辅助线，目的在于指导学生有逻辑地进行平行四边形问题解决，加强对平行四边形性质的理解，从多种视角推理解决问题，提升逻辑推理水平，这些也是提升素养的必备环节。

2.规划单元思路

需要进一步将研究内容纳入知识框架，提出研究设想，做好单元规划。平行四边形单元研究体系的构建、起始课的教学都依赖于类比和归纳推理。通过类比三角形和特殊三角形的研究过程规划平行四边形的单元研究路径，通过类比、

归纳等推理形式获得研究对象，进而用演绎推理的方式从定义出发研究性质并简单应用，以及从定义出发研究判定并简单应用。其它特殊平行四边形的研究可以根据逻辑发展脉络，采用类比的方式复制平行四边形的研究过程。

结语

1.从思维训练的角度考虑，我们之前的教育，更多是培养学生的演绎推理能力，而缺少归纳推理的能力 [2]。从单元整体的视角看，平行四边形单元有良好的上位知识和能力储备，既有几何研究的一般方法，又有扎实的演绎推理基础。因此，本单元适合以学法指导为主，让学生通过调取已有经验主动发现结论，并利用演绎推理对发现的结论做出判断，主动构建学习过程，为后续学习打好基础。

2.培养学生数学核心素养，需要教师帮助学生亲身经历数学化的过程，获得理解性掌握，在获知过程中提升数学核心素养[3]。素养的养成需要学生有良好的基础知识基本技能，更需要对学生思想方法指导，需要足够的活动经验的积累。

3.作为连接思想与方法的桥梁，数学思维形式中包含着逻辑推理，并且归纳推理和演绎推理的过程也往往是相互交织的。有良好的逻辑推理素养主要表现在数学对象之间的推知或联系能力，有逻辑地思考问题，在比较复杂的情境中能够把握事物之间的关联，重论据、有条理，能准确地把握事物发展的脉络，有合乎逻辑的思维品质和理性精神，以及较强的交流能力，这是培养逻辑推理素养的价值所在。

参考文献

- [1]孙宏安.谈逻辑推理[J].中学数学教学参考, 2017 (09) 上旬: 2-6
- [2]史宁中.推进基于学科核心素养的教学改革[J].中小学管理, 2016 (02) 19-21
- [3]孔凡哲, 史宁中.中国学生发展的数学核心素养概念界定及养成途径[J].中国人民大学复印报刊资料 (中小学教育) 2018 年增刊.120~123